第 2 节 离散型随机变量的分布列与数字特征（★★★）

强化训练

1．（2019·浙江卷·★★）设 $0<a<1$，随机变量 X 的分布列是

X	0	a	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当 a 在 $(0,1)$ 内增大时，（　　）

（A）$D(X)$增大　（B）$D(X)$减小　（C）$D(X)$先增大后减小　（D）$D(X)$先减小后增大

答案： D

解析： 用公式 $\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(X)]^2p_i$ 计算方差当然可以，但用 $D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-[E(X)]^2$ 更简单，

由题意，$E(X)=0\cdot\frac{1}{3}+a\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{a+1}{3}$，$D(X)=0^2\times\frac{1}{3}+a^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}-(\frac{a+1}{3})^2=\frac{2}{9}(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}$，

函数 $f(a)=\frac{2}{9}(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上↘，在 $(\frac{1}{2},1)$ 上↗，所以当 a 在 $(0,1)$ 内增大时，$D(X)$先减小后增大.

2．（2023·四川模拟·★★★）已知随机变量 $\xi_i(i=1,2)$ 的分布列如下表：

ξ_i	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	p_i	$\frac{2}{3}-p_i$

若 $0<p_1<p_2<\frac{2}{3}$，则（　　）

（A）$E(\xi_1)>E(\xi_2)$，$D(\xi_1)>D(\xi_2)$　（B）$E(\xi_1)<E(\xi_2)$，$D(\xi_1)>D(\xi_2)$

（C）$E(\xi_1)>E(\xi_2)$，$D(\xi_1)<D(\xi_2)$　（D）$E(\xi_1)<E(\xi_2)$，$D(\xi_1)<D(\xi_2)$

答案： A

解析： 由所给分布列可得 $E(\xi_i)=0\times\frac{1}{3}+1\times p_i+2\times(\frac{2}{3}-p_i)=\frac{4}{3}-p_i$，

所以 $E(\xi_1)=\frac{4}{3}-p_1$，$E(\xi_2)=\frac{4}{3}-p_2$，因为 $0<p_1<p_2<\frac{2}{3}$，所以 $E(\xi_1)>E(\xi_2)$；

再算方差，此处若用 $\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(X)]^2p_i$ 来算，则计算量较大，可按 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-[E(X)]^2$ 来算，

$D(\xi_i)=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot p_i+2^2(\frac{2}{3}-p_i)-(\frac{4}{3}-p_i)^2=-p_i^2-\frac{p_i}{3}+\frac{8}{9}$，所以 $D(\xi_1)=-p_1^2-\frac{1}{3}p_1+\frac{8}{9}$，$D(\xi_2)=-p_2^2-\frac{1}{3}p_2+\frac{8}{9}$，

要比较 $D(\xi_1)$ 和 $D(\xi_2)$ 的大小，可将其作差来看，

$D(\xi_1)-D(\xi_2)=-p_1^2-\frac{1}{3}p_1+\frac{8}{9}-(-p_2^2-\frac{1}{3}p_2+\frac{8}{9})=(p_2-p_1)(p_2+p_1+\frac{1}{3})>0$，所以 $D(\xi_1)>D(\xi_2)$.

【反思】①给出随机变量 X 的分布列 $P(X=x_i)=p_i(i=1,2,\cdots,n)$，很多时候用公式 $D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-[E(X)]^2$ 求方差比用 $\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(X)]^2p_i$ 来算更简单；②本题也可用特值法，例如，可取 $p_1=\frac{1}{3}$，$p_2=\frac{1}{2}$，分别求出 ξ_1 和 ξ_2 的期望和方差再比较.

3.（2023・淮北一模・★★★）为弘扬中华优秀传统文化，营造良好的文化氛围，某高中校团委组织非毕业年级开展了“我们的元宵节”主题知识竞答活动，该活动有个人赛和团体赛，每人只能参加其中的一项，根据各位学生的答题情况，获奖学生人数统计如下：

奖项/组别	个人赛			团体赛获奖
	一等奖	二等奖	三等奖	
高一	20	20	60	50
高二	16	29	105	50

（1）从获奖学生中随机抽取 1 人，若已知抽到的学生获得一等奖，求抽到的学生来自高一的概率；

（2）从高一和高二获奖者中各随机抽取 1 人，以 X 表示这 2 人中团体赛获奖的人数，求 X 的分布列和期望；

（3）从获奖学生中随机抽取 3 人，设这 3 人来自高一的人数为 ξ，来自高二的人数为 η，试判断 $D(\xi)$ 与 $D(\eta)$ 的大小关系.（结论不要求证明）

解：（1）已知抽到的学生获得一等奖，所以必定抽到了高一获一等奖的 20 人，或高二获一等奖的 16 人，共有 36 种抽法，其中有 20 种是抽到的学生来自高一的情形，故所求概率为 $\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.

（2）（高一、高二抽取的 1 人都可能是或不是团体赛获奖者，故分别讨论其组合方式以及对应 X 的值）

若高一、高二都没有抽到团体赛获奖者，则 $X=0$，所以 $P(X=0)=\frac{C_{100}^1}{C_{150}^1}\times\frac{C_{150}^1}{C_{200}^1}=\frac{1}{2}$，

若高一、高二恰有一个年级抽到团体赛获奖者，则 $X=1$，所以 $P(X=1)=\frac{C_{50}^1}{C_{150}^1}\times\frac{C_{150}^1}{C_{200}^1}+\frac{C_{100}^1}{C_{150}^1}\times\frac{C_{50}^1}{C_{200}^1}=\frac{5}{12}$，

若高一、高二都抽到团体赛获奖者，则 $X=2$，所以 $P(X=2)=\frac{C_{50}^1}{C_{150}^1}\times\frac{C_{50}^1}{C_{200}^1}=\frac{1}{12}$，故 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

所以 X 的期望 $E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$.

（3）（若求出 ξ 和 η 的方差，再比大小，则太麻烦，故先分析 ξ 和 η 的关系，看能否找到它们方差的关系）

取出的 3 人要么来自高一，要么来自高二，所以 $\xi+\eta=3$，从而 $\eta=3-\xi$，故 $D(\eta)=D(3-\xi)$，

由方差的性质，$D(3-\xi)=(-1)^2D(\xi)=D(\xi)$，所以 $D(\eta)=D(\xi)$.

4.（2023・浙江模拟・★★★）甲、乙两位棋手与同一台智能机器人进行国际象棋比赛，相互独立，互不影响，计分规则如下：在一轮比赛中，如果甲赢而乙输，则甲得 1 分；如果甲输而乙赢，则甲得 -1 分；如果甲和乙同时赢或同时输，则甲得 0 分. 设甲赢机器人的概率为 0.6，乙赢机器人的概率为 0.5. 记甲在一

轮比赛中的得分为 X，在两轮比赛中的得分为 Y.

（1）若甲单独与机器人进行三次比赛，求甲至少赢一次的概率；

（2）求 X 的分布列；

（3）求 Y 的均值.

解：（1）（至少赢一次，可能的情况较多，其对立事件只有三次全败一种情况，故用对立事件求概率）

记甲单独与机器人进行三次比赛至少赢一次为事件 A，则 $P(A)=1-P(\bar{A})=1-(1-0.6)^3=0.936$.

（2）由题意，X 可能的取值有 1，0，-1，且 $P(X=1)=0.6\times(1-0.5)=0.3$，

$P(X=0)=0.6\times0.5+(1-0.6)\times(1-0.5)=0.5$，$P(X=-1)=(1-0.6)\times0.5=0.2$，所以 X 的分布列为：

X	1	0	-1
P	0.3	0.5	0.2

（3）（Y 是两轮比赛后的得分，应先将 Y 的取值转化成两轮各自的得分组合）

由题意，第一轮、第二轮各自的得分均可能为 1，0，-1，所以 Y 可能的取值为 2，1，0，-1，-2，

若 $Y=2$，则只能两轮都得 1 分，所以 $P(Y=2)=0.3\times0.3=0.09$，

若 $Y=1$，则可以第一轮 1 分，第二轮 0 分，也可以第一轮 0 分，第二轮 1 分，

所以 $P(Y=1)=0.3\times0.5+0.5\times0.3=0.3$，

若 $Y=0$，则可以第一轮和第二轮均得 0 分，或第一轮 1 分，第二轮 -1 分，又或第一轮 -1 分，第二轮 1 分，

所以 $P(Y=0)=0.5\times0.5+0.3\times0.2+0.2\times0.3=0.37$，

若 $Y=-1$，则可以第一轮 0 分，第二轮 -1 分，也可以第一轮 -1 分，第二轮 0 分，

所以 $P(Y=-1)=0.5\times0.2+0.2\times0.5=0.2$，

若 $Y=-2$，则只能两轮都得 -1 分，所以 $P(Y=-2)=0.2\times0.2=0.04$，故 Y 的分布列为：

Y	2	1	0	-1	-2
P	0.09	0.3	0.37	0.2	0.04

所以 $E(Y)=2\times0.09+1\times0.3+0\times0.37+(-1)\times0.2+(-2)\times0.04=0.2$.

5.（2023·全国模拟·★★★）为迎接 2022 年北京冬奥会，推广滑雪运动，某滑雪场开展滑雪促销活动. 该滑雪场的收费标准是：滑雪时间不超过 1 小时免费，超过 1 小时的部分每小时收费标准为 40 元（不足 1 小时的部分按 1 小时计算）. 有甲、乙两人相互独立地来该滑雪场运动，设甲、乙不超过 1 小时离开的概率分别为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$；1 小时以上且不超过 2 小时离开的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$；两人滑雪时间都不会超过 3 小时.

（1）求甲、乙两人所付滑雪费用相同的概率；

（2）设甲、乙两人所付的滑雪费用之和为随机变量 ξ，求 ξ 的分布列与均值 $E(\xi)$，方差 $D(\xi)$.

解：（1）（滑雪费用与时间有关，故应把两人所付滑雪费用相同转换到两人滑雪时间的关系上来）

记甲、乙两人所付滑雪费用相同为事件 A，则 A 包含三种情况，即两人滑雪时间都在 $(0,1]$，$(1,2]$ 或 $(2,3]$ 上，概率相加即可，所以 $P(A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{6}-\frac{2}{3})=\frac{5}{12}$.

（2）设甲、乙所付滑雪费用分别为 X 和 Y，则 X，Y 可能的取值分别为 0，40，80，

且 $P(X=0)=\frac{1}{4}$，$P(X=40)=\frac{1}{2}$，$P(X=80)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

$P(Y=0)=\frac{1}{6}$，$P(Y=40)=\frac{2}{3}$，$P(Y=80)=1-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$，

由题意，$\xi=X+Y$，所以 ξ 可能的取值分别为 0，40，80，120，160，

（接下来求 ξ 取各值的概率，只需把 ξ 的每一种取值对应到 X 和 Y 分别取多少去算即可）

$P(\xi=0)=P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$，$P(\xi=40)=P(X=0)P(Y=40)+P(X=40)P(Y=0)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$，

$P(\xi=80)=P(X=0)P(Y=80)+P(X=40)P(Y=40)+P(X=80)P(Y=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$，

$P(\xi=120)=P(X=40)P(Y=80)+P(X=80)P(Y=40)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$，

$P(\xi=160)=P(X=80)P(Y=80)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$，所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	40	80	120	160
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

故 $E(\xi)=0\times\frac{1}{24}+40\times\frac{1}{4}+80\times\frac{5}{12}+120\times\frac{1}{4}+160\times\frac{1}{24}=80$，

$D(\xi)=(0-80)^2\times\frac{1}{24}+(40-80)^2\times\frac{1}{4}+(80-80)^2\times\frac{5}{12}+(120-80)^2\times\frac{1}{4}+(160-80)^2\times\frac{1}{24}=\frac{4000}{3}$.

6.（2022·全国甲卷·★★★）甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平局，三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军. 已知甲学校在三个项目中获胜的概率分别为 0.5，0.4，0.8，各项目的比赛结果相互独立.

（1）求甲学校获得冠军的概率；

（2）用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与期望.

解：（1）（应先分析甲获得冠军，每个项目可能的胜负情况有哪些，为了方便阐述，给三个项目命名）

记三个项目分别为 A，B，C，甲在三个项目中获胜的概率分别为 0.5，0.4，0.8，

则能使甲获得冠军的三个项目的胜负情况有：胜胜负，胜负胜，负胜胜，胜胜胜，四种情况彼此互斥，

故所求概率 $P=0.5\times0.4\times(1-0.8)+0.5\times(1-0.4)\times0.8+(1-0.5)\times0.4\times0.8+0.5\times0.4\times0.8=0.6$.

（2）（X 的取值由乙获胜项目的个数决定，故按获胜项目的个数讨论，分别求概率）

由题意，乙在 A，B，C 三个项目获胜的概率分别为 0.5，0.6，0.2，

若乙三个项目全败，则 $X=0$，所以 $P(X=0)=(1-0.5)\times(1-0.6)\times(1-0.2)=0.16$，

若乙三个项目胜 1 个，则可能的情况有：胜败败，败胜败，败败胜，对应 X 的值均为 10，

所以 $P(X=10)=0.5\times(1-0.6)\times(1-0.2)+(1-0.5)\times0.6\times(1-0.2)+(1-0.5)\times(1-0.6)\times0.2=0.44$，

若乙三个项目胜 2 个，可能的情况有：胜胜败，胜败胜，败胜胜，对应 X 的值均为 20，

所以 $P(X=20)=0.5\times0.6\times(1-0.2)+0.5\times(1-0.6)\times0.2+(1-0.5)\times0.6\times0.2=0.34$，

若乙三个项目全胜，则 $X=30$，所以 $P(X=30)=0.5\times0.6\times0.2=0.06$，从而 X 的分布列为：

X	0	10	20	30
P	0.16	0.44	0.34	0.06

故 X 的期望 $E(X)=0\times0.16+10\times0.44+20\times0.34+30\times0.06=13$.

7.（2023 • 浙江模拟 • ★★★）甲、乙两篮球队进行篮球比赛，规定每一局比赛中获胜方记 1 分，失败方记 0 分，没有平局. 谁先获得 3 分就获胜，比赛结束. 每场比赛分主客场，甲队主场取胜的概率为 $\frac{2}{3}$，客场取胜的概率为 $\frac{1}{2}$，假设第一场比赛在甲队的主场进行，后面的每一场比赛都在前一场的负方主场进行.

（1）求比赛结束时恰好打了 3 局的概率；

（2）若现在是甲队以 $1:0$ 的比分领先，记 X 表示结束比赛还需打的局数，求 X 的分布列和数学期望.

解：（1）要打 3 局就结束，则只能是甲队三连胜，或乙队三连胜，

由题意，甲队三连胜的概率为 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，乙队三连胜的概率为 $(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{3})=\frac{1}{27}$，

所以比赛结束时恰好打了 3 局的概率为 $\frac{1}{6}+\frac{1}{27}=\frac{11}{54}$.

（2）（接下来至少还要打 2 局，最多打 4 局，可先分析 X 取每个值时，各局的胜负情况有哪些，算概率时需注意主客场胜率不同）

若再打 2 局比赛就结束，则接下来的 2 局必定是甲连胜，所以 $P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

若再打 3 局比赛结束，则可能甲胜或者甲负，分两类，若甲胜则为：胜负胜，负胜胜；甲负则为：负负负，

所以 $P(X=3)=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})\times\frac{2}{3}+(1-\frac{1}{2})\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{2}{3})=\frac{7}{18}$，

若再打 4 局比赛结束，则接下来的 3 局甲必须胜 1 局，可能的胜负情况为：胜负负，负胜负，负负胜，这样第 4 局结束时，甲乙各胜 2 局都得 2 分，而最后 1 局不必考虑，因为必有一人胜利总共得 3 分，

所以 $P(X=4)=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{2}{3})+(1-\frac{1}{2})\times\frac{2}{3}\times(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{2}{3})\times\frac{2}{3}=\frac{13}{36}$，从而 X 的分布列为：

X	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{13}{36}$

故 X 的期望 $E(X)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{7}{18}+4\times\frac{13}{36}=\frac{28}{9}$.

8.（2023 • 全国模拟 • ★★★★）某公司在一种传染病毒的检测试剂品上加大了研发投入，其研发的检验试剂 α 分为两种不同剂型 α_1 和 α_2，现对其进行两次检测，第一次检测时 α_1 和 α_2 合格的概率分别为 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{3}{5}$，第二次检测时 α_1 和 α_2 合格的概率分别为 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{2}{3}$. 已知两次检测的过程相互独立，且只有当一种剂型的两次检测均合格时，该剂型才算合格.

（1）设经过两次检测后两种剂型 α_1 和 α_2 合格的种类数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（2）若地区排查期间，一户 4 口之家被确认为“与确诊患者的密切接触者”，这种情况下医护人员要对其

家庭成员逐一使用试剂品 α 进行检测，若有一人检测呈阳性，则检测结束，并确定该家庭为“感染高危户”.设该家庭每个成员检测呈阳性的概率均为 $p(0<p<1)$ 且相互独立，该家庭至少检测了 3 个人才确定为“感染高危户”的概率为 $f(p)$，若当 $p=p_0$ 时，$f(p)$ 最大，求 p_0 的值.

解：(1)（应先计算每种剂型合格的概率）剂型 α_1，α_2 合格的概率分别为 $p_1=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$，$p_2=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$，

两种剂型 α_1 和 α_2 合格的种类数 X 的可能取值有 0，1，2，且 $P(X=0)=(1-p_1)(1-p_2)=\frac{6}{25}$，

$P(X=1)=p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2=\frac{13}{25}$，$P(X=2)=p_1p_2=\frac{6}{25}$，所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{6}{25}+1\times\frac{13}{25}+2\times\frac{6}{25}=1$.

(2)（先求 $f(p)$ 的解析式，至少 3 人可分为恰好 3 人和恰好 4 人两种情况）

该家庭至少检测了 3 个人才确定为“感染高危户”的概率 $f(p)=(1-p)^2p+(1-p)^3p=(1-p)^2(2p-p^2)$，

所以 $f'(p)=-2(1-p)(2p-p^2)+(1-p)^2(2-2p)=2(p-1)(-2p^2+4p-1)$，其中 $0<p<1$，

故 $f'(p)>0\Leftrightarrow -2p^2+4p-1<0\Leftrightarrow (p-1)^2>\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<p<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f'(p)<0\Leftrightarrow 1-\frac{\sqrt{2}}{2}<p<1$，

所以 $f(p)$ 在 $(0,1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上单调递增，在 $(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ 上单调递减，故 $f(p)_{\max}=f(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$，即 $p_0=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.